Problema P16

(i) Sia $f \in C(\partial B(0,r), \mathbb{R})$ e R una matrice di rotazione (ossia $R \in \mathrm{Mat}(3\times 3)$ con $R^T = R^{-1}$). Dimostrare che

$$\int_{\partial B(0,r)} f\, d\sigma = \int_{\partial B(0,r)} f \circ R\, d\sigma \ .$$

(ii) Sia u soluzione di

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \ , \ x \in \mathbb{R}^3 \ , \ t > 0 \ , \\ u(x,0) = 0 \ , \ x \in \mathbb{R}^3 \ , \\ u_t(x,0) = h(\bar{x}) \ , \ \bar{x} = (x_1, x_2) \ . \end{cases}$$

Dimostrare che $u(x,t) = u(\bar{x},t)$ (ossia che u non dipende da x_3) e che quindi u è soluzione di

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_{\bar{x}} u = 0 \ , \ \bar{x} \in \mathbb{R}^2 \ , \ t > 0 \ , \\ u(\bar{x},0) = 0 \ , \ \bar{x} \in \mathbb{R}^2 \ , \\ u_t(\bar{x},0) = h(\bar{x}) \ , \ \bar{x} \in \mathbb{R}^2 \ . \end{cases}$$

(iii) Dimostrare che la soluzione di

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \ , \ x \in \mathbb{R}^2 \ , \ t > 0 \ , \\ u(x,0) = 0 \ , \ x \in \mathbb{R}^2 \ , \\ u_t(x,0) = h(x) \ , \ x \in \mathbb{R}^2 \ . \end{cases}$$

è data da

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{B(x,t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\, dy$$

[Suggerimento: usare (ii) e scegliere, nella formula risolutiva in $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$, $x = (x_1, x_2, 0)$.]

(iv) Scrivere le formule risolutive complete del problema di Cauchy per le onde in $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ e $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ (con dato iniziale generale $u|_{t=0} = g$ e $u_t|_{t=0} = h$).

(v) Scrivere l'equazione differenziale che soddisfa la media sferica di una soluzione del problema di Cauchy per le onde in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ [equazione di Eulero–Poisson–Darboux].

(vi) Enunciare e dimostrare il principio di Duhamel per il problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f(x,t) \ , \ x \in \mathbb{R}^n \ , \ t > 0 \ , \\ u(x,0) = 0 \ , \ x \in \mathbb{R}^n \ , \\ u_t(x,0) = 0) \ , \ x \in \mathbb{R}^n \ . \end{cases}$$